Cuadernos de COU y
Selectividad

FISICA

2

Cinemática

J. J. LOZANO LUCEA y J. L. VIGATÁ CAMPO

Alhambra Longman

Cuadernos de COU y
Selectividad

J. J. Lozano Lucea
J. L. Vigatá Campo

2

Cinemática

FÍSICA

Alhambra Longman

Producción editorial:
Dirección: José Luis Ferrer
Coordinación: Óscar García
Diseño: Gentil Andrade

ISBN 84-205-2123-X

Depósito legal: M. 20.874-1992

Impreso en España - Printed in Spain

Gráficas Rógar, S. A. - León, 44. Pol. Ind. Cobo Calleja - Fuenlabrada (Madrid)

Contenido

	Págs.
Recordatorio	5
Componentes intrínsecas del vector aceleración	5
Movimiento rectilíneo y uniforme	6
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	7
Movimientos circulares	8
Relación entre las magnitudes lineales y las magnitudes angulares	10
Movimiento circular uniforme	10
Movimiento circular uniformemente acelerado	12
Composición de movimientos	12
Movimiento de proyectiles	13
Movimiento armónico simple	15
Cinemática de la traslación de un sólido	16
Cuestiones	17
Soluciones a las cuestiones propuestas	20
Ejercicios resueltos	21
Ejercicios propuestos	39

Recordatorio

Componentes intrínsecas del vector aceleración

Además de según los ejes cartesianos, suele considerarse descompuesta la aceleración según dos ejes tomados de forma que uno de ellos sea tangente a la trayectoria en el punto considerado, y el otro perpendicular a la misma, de modo que

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$$

La *aceleración tangencial*, $\vec{a_t}$, es un vector tangente a la trayectoria en el punto considerado, cuyo módulo se identifica con la derivada del módulo del vector velocidad con respecto al tiempo, y cuyo sentido es el del avance del móvil si la velocidad aumenta o el opuesto si la velocidad disminuye.

$$\vec{a_t} = \frac{d\,|\vec{v}|}{dt}\,\vec{\tau}$$

La aceleración tangencial mide la variación en módulo del vector velocidad.

La *aceleración normal*, $\vec{a_n}$, es un vector perpendicular a la trayectoria en el punto considerado, cuyo sentido es hacia el centro de curvatura, y cuyo módulo viene dado por

$$\frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

en donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado. Es decir

$$\vec{a_n} = \frac{|\vec{v}|^2}{R}\,\vec{n}$$

La aceleración normal nos indica la variación en dirección del vector velocidad.

Por lo tanto,

$$\vec{a} = \frac{d\,|\vec{v}|}{dt}\,\vec{\tau} + \frac{|\vec{v}|^2}{R}\,\vec{n}$$

Conocidos el vector $\vec{v}$ y el vector $\vec{a}$, podemos establecer unas sencillas relaciones entre estos vectores y las componentes intrínsecas:

$$|\vec{a_t}| = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|}$$

$$|\vec{a_n}| = \frac{\vec{v}\times\vec{a}}{|\vec{v}|}$$

Movimiento rectilíneo y uniforme

Como su nombre indica, es un movimiento en el que la trayectoria es una recta, y para el que, tomado el origen de coordenadas sobre la trayectoria, la ecuación del movimiento es del tipo

$$r = r_o + vt$$

por lo tanto, el espacio recorrido sobre la trayectoria será

$$r - r_o + vt$$

Al ser la velocidad constante, en módulo, dirección y sentido,

$$a = 0$$

La gráfica $r = r\,(t)$ para el movimiento rectilíneo y uniforme es una recta cuya ordenada en el origen es r_o y cuya pendiente nos

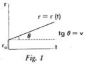


Fig. 1

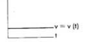


Fig. 2

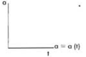


Fig. 3

da precisamente la velocidad con que tiene lugar el movimiento (fig. 1).

La gráfica $v = v\ (t)$ para el movimiento rectilíneo y uniforme es una recta paralela al eje de los tiempos (pendiente nula, como corresponde a un valor nulo de la aceleración) (fig. 2).

La gráfica $a = a\ (t)$ para el movimiento rectilíneo y uniforme es una recta que coincide con el eje de abscisas (fig. 3).

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Como su nombre indica, es un movimiento en el que la trayectoria es una recta, y para el que, tomado el origen de coordenadas sobre la trayectoria, la ecuación del movimiento es del tipo

$$r = r_o + v_o t + \frac{1}{2}\, at^2$$

También se cumple para este movimiento que

$$v = v_o + at$$

en donde v es la velocidad del móvil en el instante t.

En el caso de que la velocidad no invierta su sentido, el espacio recorrido sobre la trayectoria será

$$r - r_o = v_o t + \frac{1}{2}\, at^2$$

En el caso de que la velocidad invierta su sentido, es recomendable, para el cálculo del espacio recorrido sobre la trayectoria, considerar el movimiento descompuesto en movimientos parciales, para cada uno de los cuales el sentido de la velocidad permanezca constante.

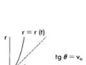


Fig. 4

La gráfica $r = r\ (t)$ para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es una rama de parábola cuya ordenada en el origen es r_o y cuya pendiente para $t = 0$ es v_o (fig. 4).

La gráfica $v = v\ (t)$ para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es una recta, cuya ordenada en el origen es v_o y

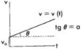


Fig. 5

cuya pendiente nos da precisamente la aceleración con que tiene lugar el movimiento (fig. 5).

La gráfica $a = a\ (t)$ para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es una recta paralela al eje de los tiempos (fig. 6).

Movimientos circulares

Los movimientos circulares son aquellos en que la trayectoria que describe el móvil es una circunferencia.

En el caso de describir el movimiento mediante magnitudes lineales, tendremos que indicar la velocidad, $\vec{v}$, para los distintos puntos de la trayectoria, así como los valores que para cada punto adoptan la aceleración tangencial, a_t, y la aceleración normal, a_n.

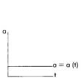


Fig. 6

Podemos describir el movimiento e incluso determinar los valores de las magnitudes lineales a partir de las magnitudes angulares; para ello, y partiendo de la definición de radián, tendremos

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R}$$

en donde R es el radio de la trayectoria; ΔS el espacio recorrido sobre la trayectoria, y $\Delta\varphi$, el ángulo barrido por el vector de posición (tomado el origen de coordenadas en el centro de giro). El ángulo $\Delta\varphi$ debe expresarse en radianes.

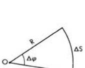


Fig. 7

Se define la *velocidad angular media*, $\vec{\omega_m}$, como un vector axial, perpendicular al plano que contiene a la trayectoria, cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos para diestros que gire en el sentido en que se ha descrito $\Delta\varphi$ y cuyo módulo vale

$$|\vec{\omega_m}| = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

por consiguiente,

$$|\vec{\omega_m}| = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,\vec{e}$$

en donde $\vec{e}$ es un vector unitario perpendicular al plano que contiene a la trayectoria.

Se define la *velocidad angular instantánea*, $\vec{\omega}$, como un vector axial, perpendicular al plano que contiene a la trayectoria, cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos para diestros que gire como lo haría el móvil alrededor del centro de giro y cuyo módulo vale

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$$

por consiguiente, y asignando a $\vec{e}$ la significación anterior,

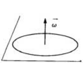


Fig. 8

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}$$

La ecuación de dimensiones de ω es

$$[\omega] = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

y la unidad de medida de ω en el SI es el s^{-1} o rad/s (radián por segundo).

Se define la *aceleración angular media*, $\vec{\alpha}_m$, como un vector axial, perpendicular al plano que contiene a la trayectoria, cuyo sentido es el de $\Delta\vec{\omega}$ y cuyo módulo vale

$$|\vec{\alpha}_m| = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

por lo tanto,

$$\vec{\alpha}_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\,\vec{e}$$

Definimos la *aceleración angular instantánea*, $\vec{\alpha}$, como un vector axial, perpendicular al plano que contiene a la trayectoria, cuyo sentido viene dado por el de $d\vec{\omega}$ y cuyo módulo vale

$$\frac{d\omega}{dt}$$

en consecuencia

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathbf{e}}$$

La ecuación de dimensiones de α es

$$[\alpha] = \frac{1}{T^2} = T^{-2}$$

y la unidad de medida de α en el SI es el s^{-2} o rad/s^2 (radián por segundo en cada segundo).

Relación entre las magnitudes lineales y las magnitudes angulares

A través de la definición de radián

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R}$$

podemos obtener interesantes relaciones entre las magnitudes lineales y las magnitudes angulares para los movimientos circulares:

$v = R\omega$ o $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}$

$a_t = R\alpha$ o $\vec{\mathbf{a_t}} = \vec{\alpha} \times \vec{\mathbf{R}}$

$a_n = \omega^2 R$

Movimiento circular uniforme

Es un movimiento de trayectoria circular en el que a_t es nula y a_n es constante. La ecuación del movimiento en función de las magnitudes angulares es

$$\varphi = \varphi_o + \omega t$$

en donde

- φ Valor del ángulo total descrito por el vector de posición medido desde el eje de referencia.
- φ_o Valor del ángulo descrito por el vector de posición desde el eje de referencia para $t = 0$.
- ω Velocidad angular (constante).
- t Tiempo transcurrido desde el instante inicial.

El ángulo barrido en el tiempo t será

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o = \omega t$$

Al ser constante la velocidad angular en módulo, dirección y sentido

$$\alpha = 0$$

El espacio recorrido sobre la trayectoria puede expresarse como

$$S - S_o = R\,(\varphi - \varphi_o) = R\omega t$$

o bien

$$S - S_o = vt$$

Además

$$a_t = 0 \quad \text{y} \quad a_n = \omega^2 R$$

El movimiento circular uniforme es un movimiento periódico, es decir, que a intervalos iguales de tiempo repite los valores de posición, velocidad y aceleración. Al tiempo invertido por el móvil en un giro completo se le denomina *período*, T, del movimiento circular. Si el móvil parte del eje de referencia

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Se llama *frecuencia*, f, al número de vueltas que da el móvil por unidad de tiempo (segundo). La frecuencia, que será la inversa del período, se expresa en el SI en s^{-1} o Hz (hertzios).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

Es un movimiento de trayectoria circular en el que a_t es constante. La ecuación del movimiento en función de las magnitudes angulares es

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

en donde φ, φ_o y t tienen la misma significación que en la ecuación correspondiente al movimiento circular uniforme y ω_o corresponde al valor de la velocidad angular en el momento inicial; α representa la aceleración angular (constante).

Para este movimiento también se cumple que

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

Composición de movimientos

El Principio de superposición establece que:

Cuando una partícula material está sometida simultáneamente a varios movimientos elementales independientes, el vector de posición del móvil para el movimiento resultante es, en cada instante, la suma vectorial de los vectores de posición respectivos que corresponderían a los distintos movimientos componentes.

El anterior Principio de superposición se apoya sobre el Principio de la independencia enunciado por Galileo, que establece que:

Cuando un punto material se ve sometido por causas diferentes a dos o más movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente de que imaginemos que los movimientos tienen lugar sucesiva o simultáneamente.

Movimiento de proyectiles

Llamamos proyectil a cualquier móvil que una vez lanzado se mueve bajo la acción de la gravedad (suponemos g constante y de valor 9,8 m/s²), considerando despreciable la fricción del aire.

Un caso interesante de movimiento de proyectiles es el que llamamos *tiro oblicuo*; en él, el proyectil es lanzado con una velocidad inicial $\vec{v_o}$ que forma un ángulo α con la horizontal. Tenemos aquí una situación de composición de movimientos, pues podemos suponer que el movimiento real tiene lugar como consecuencia de que el móvil está sometido a dos movimientos simultáneos:

- Un movimiento horizontal rectilíneo y uniforme de velocidad $v_o \cos \alpha$.
- Un movimiento vertical uniformemente acelerado (de aceleración $-g$) con una velocidad inicial v_o sen α (el signo dependerá de que el tiro sea inicialmente ascendente o descendente).

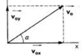


Fig. 9

$$|\vec{v_{ox}}| = v_o \cos \alpha$$

$$|\vec{v_{oy}}| = v_o \operatorname{sen} \alpha$$

El movimiento según el eje OX será

$$\vec{x} = v_o t \cos \alpha \, \vec{i}$$

y el movimiento según el eje OY será

$$\vec{y} = (v_o t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2) \, \vec{j}$$

La ecuación del movimiento (tiro oblicuo) es

$$\vec{r} = (v_o t \cos \alpha) \, \vec{i} + (v_o t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2) \, \vec{j}$$

De ésta podemos deducir la ecuación de la trayectoria

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 \, v_o^2 \cos^2\alpha} x^2$$

La velocidad del proyectil en cada instante viene dada por

$$\vec{v} = (v_o\cos\alpha)\,\vec{i} + (v_o\text{sen}\,\alpha - gt)\,\vec{j}$$

y la aceleración por

$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

La altura máxima alcanzada por el proyectil será

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_o^2\text{sen}^2\alpha}{2g}$$

y el alcance máximo

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_o^2\text{sen}\,2\alpha}{g}$$

Como casos límites particulares de tiro oblicuo podemos considerar:

- Tiro vertical, que corresponde a un ángulo de lanzamiento con la horizontal de 90°, y para el que en tiro ascendente

$$\vec{r} = (v_o t - \frac{1}{2}gt^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_o - gt)\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

La ecuación de la trayectoria es

$$x = 0$$

- Tiro horizontal, que corresponde a un ángulo de lanzamiento con la horizontal de 0° y para el que

$$\vec{r} = v_o t\vec{i} - \frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$

$$\vec{v} = v_o\vec{i} - gt\vec{j}$$

$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

La ecuación de la trayectoria es

$$y = \frac{g}{2\,v_o^2}\,x^2$$

Movimiento armónico simple

El movimiento armónico simple o movimiento vibratorio armónico simple es un movimiento rectilíneo oscilatorio en torno a una posición de equilibrio. Responde a la ecuación

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

en donde

- x Elongación (distancia a la posición de equilibrio).
- A Amplitud (elongación máxima).
- ω Pulsación, constante característica del movimiento, relacionada con el período y con la frecuencia por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{y} \quad \omega = 2\pi f$$

  siendo el período, T, el tiempo invertido por el móvil en una oscilación completa, y la frecuencia, f, el número de oscilaciones por segundo. Al producto ωt se le denomina fase del movimiento vibratorio armónico simple.

- t Tiempo transcurrido desde el instante inicial.
- φ Corrección de fase o desfasaje inicial.

Para este movimiento

$$v = +A\,\omega\cos(\omega t + \varphi) = \omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

por lo tanto, la velocidad será máxima para la posición de equilibrio y nula en los extremos de la trayectoria. También

$$a = -\,A\omega^2 \text{ sen } (\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

en consecuencia, la aceleración será nula en la posición de equilibrio y máxima en los extremos con un valor de $A\ \omega^2$.

Cinemática de la traslación de un sólido

Cuando se traslada un sólido sin rotar, cualquier recta ligada al cuerpo se mantiene paralela a sí misma, de modo que, en un momento dado, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad y la misma aceleración. Estas consideraciones nos permiten estudiar la traslación de un sólido como si de la traslación de un punto se tratara.

Cuestiones

En todos los casos supondremos nulas las fricciones y constante el valor de g.

1. Un movimiento es uniforme si el módulo de la velocidad no varía con el tiempo. V F

2. Cuando la velocidad de un cuerpo varía decimos que el movimiento es acelerado. V F

3. La aceleración es un aumento de velocidad. V F

4. Cuando la trayectoria de un movimiento es curvilínea, el recorrido es siempre mayor que el desplazamiento. V F

5. Cuando el vector velocidad no cambia de dirección ni de sentido, decimos que el movimiento es uniforme. V F

6. Si un móvil, sobre una recta, recorre 2 m en cada segundo, se puede afirmar que lleva un movimiento rectilíneo y uniforme. V F

7. En el movimiento circular uniforme la aceleración es nula. V F

8. La aceleración normal es siempre nula en los movimientos rectilíneos. V F

9. Si un cuerpo cae desde una altura *h*, llega al suelo con la misma celeridad con la que habría que lanzarlo verticalmente y hacia arriba para que alcanzase dicha altura. V F

10. Si un cuerpo cae desde doble altura que otro, llegará al suelo con una velocidad doble que la del segundo. V F

11. Si dos cuerpos caen simultáneamente, y uno lo hace desde una altura doble que el otro, en un instante cualquiera (antes de llegar al suelo) poseen ambos la misma velocidad. V F

12. Si un avión en vuelo horizontal y con velocidad constante deja caer un objeto, éste se mantiene verticalmente bajo el avión hasta tocar el suelo. V F

13. En un movimiento curvilíneo, la aceleración instantánea nunca puede ir dirigida desde el interior hacia el exterior de la curva en el punto considerado. V F

14. En un movimiento curvilíneo la aceleración instantánea puede ser tangente a la trayectoria. V F

15. En un tiro oblicuo la aceleración permanece constante en módulo, dirección y sentido. V F

16. En un tiro horizontal la velocidad es siempre tangente a la trayectoria. V F

17. En el punto más alto de la trayectoria correspondiente a un tiro oblicuo, la velocidad del móvil es nula. V F

18. En un tiro horizontal la aceleración es siempre vertical y hacia abajo. V F

19. La gráfica *r-t* para un movimiento rectilíneo tiene que ser una recta. V F

20. En un tiro horizontal la velocidad mantiene su componente horizontal constante. V F

21. En un tiro oblicuo la velocidad mantiene su componente horizontal constante. V F

22. En ningún punto de la trayectoria de un tiro oblicuo la velocidad puede ser horizontal. V F

23. Con un arma determinada (velocidad de tiro determinada), existen dos ángulos distintos con los que puede obtenerse el mismo alcance. V F

24. En los movimientos circulares, en tiempos iguales se barren ángulos iguales. V F

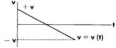
25. La aceleración normal permanece constante en los movimientos circulares uniformes. V F

26. Una partícula que oscila con movimiento vibratorio armónico simple presenta aceleración máxima en el momento en que la velocidad es nula. V F

27. En un movimiento vibratorio armónico simple la frecuencia es tanto mayor cuanto mayor es la amplitud. V F

28. En un movimiento vibratorio armónico simple la aceleración disminuye conforme el móvil se acerca al centro de oscilación. V F

29. La gráfica *v-t* para representar el movimiento de un proyectil que se lanza verticalmente y hacia arriba y acaba retornando al suelo es la que sigue: V F

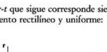


30. Una partícula con velocidad cero puede tener una aceleración distinta de cero. V F

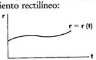
31. Una partícula con aceleración cero puede tener una velocidad distinta de cero. V F

32. Un movimiento con aceleración constante es un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado. V F

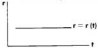
33. La gráfica *r-t* que sigue corresponde siempre a un movimiento rectilíneo y uniforme: V F



34. La gráfica *r-t* que sigue puede corresponder a un movimiento rectilíneo: V F



35. La gráfica *r-t* que sigue puede corresponder a un movimiento rectilíneo y uniforme: V F



36. Cuando desde un punto se dejan caer cuerpos iguales a intervalos iguales de tiempo, la distancia entre los cuerpos que caen permanece constante. V F

37. El chorro de agua que sale de un grifo se estrecha al bajar porque el agua incrementa su velocidad al caer. V F

38. Para un tiro horizontal, la velocidad es mínima (en módulo) en el instante del lanzamiento. V F

39. Para un tiro oblicuo, sobre suelo horizontal, la velocidad es máxima (en módulo) en el instante del lanzamiento. V F

Soluciones a las cuestiones propuestas

1	F	11	V	21	V	31	V
2	V	12	V	22	F	32	F
3	F	13	V	23	V	33	F
4	V	14	F	24	F	34	V
5	F	15	V	25	V	35	F
6	F	16	V	26	V	36	F
7	F	17	F	27	F	37	V
8	V	18	V	28	V	38	V
9	V	19	F	29	V	39	V
10	F	20	V	30	V		

Ejercicios resueltos

En todos los casos suponemos nulas las fricciones y constante el valor de g. También suponemos todos los móviles como puntuales.

1. Un móvil parte del reposo y se mueve con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado (M.R.U.A.) durante 10 s. Durante 20 s más continúa moviéndose, ahora con movimiento rectilíneo y uniforme (M.R.U.). Si al cabo de los 30 s de iniciado el movimiento, la velocidad es de 200 m/s, determinar:

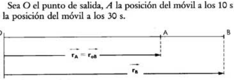
a) Aceleración durante los primeros 10 s.

b) Velocidad para el movimiento rectilíneo y uniforme.

c) Espacio total recorrido.

Resolución

Sea O el punto de salida, *A* la posición del móvil a los 10 s y *B* la posición del móvil a los 30 s.



a) Al ser uniforme el movimiento en el tramo *AB*

$$v_A = v_B$$

y como en el tramo *OA* el movimiento es uniformemente acelerado partiendo del reposo

$$v_A = a \cdot t_A$$

de donde

$$a = \frac{v_A}{t_A} = \frac{200 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}^2$$

b) La velocidad para el tramo AB, al ser un movimiento rectilíneo y uniforme, coincidirá con la velocidad en B; por lo tanto,

$$v_{AB} = v_A = v_B = 200 \text{ m/s}$$

c) El espacio total recorrido vendrá dado por $|\overrightarrow{r_B}|$

$$r_B = r_{o\,B} + v_{AB} \cdot t_{AB}$$

en donde

$$r_{o\,B} = r_A = \frac{1}{2} a \cdot t_A{}^2 = \frac{1}{2} 20 \text{ ms}^{-2} \cdot 10^2 \text{s}^2 = 1000 \text{ m}$$

$$v_{AB} = 200 \text{ m/s}$$

$$t_{AB} = 20 \text{ s}$$

por lo tanto,

$$|\overrightarrow{r_B}| = 1000 \text{ m} + 200 \text{ m s}^{-1} \cdot 20 \text{ s} = 5000 \text{ m}$$

2. Desde el brocal del pozo seco de una prospección, se deja caer una piedra. Al cabo de 15 s llega al observador que ha dejado caer la piedra, el ruido del choque de la misma contra el fondo. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

(Velocidad del sonido en el aire: 340 m/s.)

Resolución

Los 15 s de referencia corresponden a dos movimientos sucesivos:

- El movimiento de caída de la piedra, que es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado partiendo del reposo.
- El movimiento de ascenso del sonido, que es un movimiento rectilíneo y uniforme.

Los dos movimientos tienen en común el espacio recorrido, que es, precisamente, la profundidad del pozo, es decir

$$|\overrightarrow{\mathbf{r_p}} - \overrightarrow{\mathbf{r_{op}}}| = |\overrightarrow{\mathbf{r_s}} - \overrightarrow{\mathbf{r_{os}}}| = \mathrm{h}$$

Supongamos el origen de coordenadas en el fondo del pozo. Si ahora consideramos el movimiento de la piedra

$$r_p = r_{op} - \frac{1}{2} g t_p{}^2$$

$$r_p - r_{op} = - \frac{1}{2} g t_p{}^2$$

En el caso del sonido

$$r_s = r_{os} + v_s t_s$$

$$r_s - r_{os} = v_s t_s$$

Tenemos, pues, que como

$$|\overrightarrow{\mathbf{r_p}} - \overrightarrow{\mathbf{r_{op}}}| = |\overrightarrow{\mathbf{r_s}} - \overrightarrow{\mathbf{r_{os}}}|$$

$$\frac{1}{2} g t_p{}^2 = v_s t_s$$

y al ser

$t_p + t_s = 15$ s

podremos poner

$$g t_p{}^2 = 2\ v_s\ (15 - t_p) = 30 v_s - 2 v_s t_p$$

y sustituyendo los valores de los datos llegamos a

$$9{,}8\ t_p{}^2 + 680\ t_p - 10.200 = 0$$

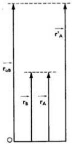
de donde

$$t_p \simeq 12{,}7 \text{ s}$$

$$h \simeq \mathbf{788\ m}$$

3. Se lanza un cuerpo con una velocidad de 40 m/s verticalmente y hacia arriba. Al mismo tiempo, con igual velocidad y desde el punto más alto de la trayectoria de dicho cuerpo se lanza otro hacia abajo. ¿Cuándo y dónde se encuentran ambos cuerpos?

Resolución



Conviene calcular, en primer lugar, la altura máxima que alcanzaría el primer móvil (desde la que lanzaremos el segundo). Situado el origen de coordenadas en el suelo y teniendo en cuenta que en el punto más alto de la trayectoria del móvil $A, v_A = 0$, podremos poner

$$v_A = 0 = v_{oA} - gt'_A$$

$$t'_A = 40 \text{ ms}^{-1}/9{,}8 \text{ m s}^{-2} = 4{,}08 \text{ s}$$

y como

$$r_A' = 0 + v_{oA}t'_A - \frac{1}{2} gt'_A{}^2 = 81{,}6 \text{ m}$$

Ahora y para el móvil que lanzamos hacia arriba, tendremos

$$r_A = v_{oA}t_A - \frac{1}{2} gt_A^2$$

y para el móvil que lanzamos hacia abajo

$$r_B = r_{oB} - v_{oB}t_B - \frac{1}{2} gt_B^2$$

en donde, como hemos dicho, $r_{oB} = r'_A$.

Por otra parte, los móviles al cruzarse coinciden en el espacio y en el tiempo, y al ser simultáneo el lanzamiento, $r_A = r_B$ y $t_A = t_B$.

El sistema obtenido de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas nos conduce a

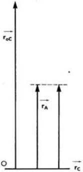
$$t_A = t_B = 1{,}02 \text{ s}$$

$$r_A = r_B = 35{,}7 \text{ m}$$

Por consiguiente, el encuentro tendrá lugar a 35,7 m de altura y 1,02 s después de efectuados los lanzamientos.

4. Un ascensor tiene 2,20 m de altura y asciende con una velocidad constante de 3 m/s. En un momento dado se desprende un clavo del techo. Calcular el tiempo que tarda en golpear el clavo contra el suelo.

Resolución



Tomamos el origen de coordenadas en la posición que ocupa el suelo del ascensor en el instante en que se desprende el clavo.

Para el ascensor

$$r_a = v_a t_a$$

Para el clavo

$$r_c = r_{oc} + v_{oc} t_c - \frac{1}{2} g t_c^2$$

En el momento del impacto hay una coincidencia en el espacio y en el tiempo, y se cumplirá

$$r_a = r_c$$

$$t_a = t_c$$

Sustituyendo los valores que nos han suministrado tenemos

$$r_a = 3t_a$$

$$r_c = 2{,}20 + 3\ t_c - 4{,}9 t_c^2$$

$$r_a = r_c$$

$$t_a = t_c$$

Sistema que, resuelto, nos conduce a

$$r_a = r_c = 2{,}01 \text{ m}$$

$$t_a = t_c = 0{,}67 \text{ s}$$

Por consiguiente, **el tiempo que tarda el clavo en golpear contra el suelo es de 0,67 s.**

5. Un movimiento responde a la ecuación

$$r = 3t^2 i + (2t + 4)\, j \qquad \text{(SI)}$$

Determinar:

a) Ecuación de la trayectoria.

b) Posición del móvil en los instantes: $t = 0$ s; $t = 2$ s; $t = 5$ s.

c) Velocidad media en el intervalo comprendido entre $t = 2$ s y $t = 5$ s.

d) Velocidad instantánea para $t = 2$ s y para $t = 5$ s.

Resolución

a) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son

$$x = 3t^2$$

$$y = 2t + 4$$

Si despejamos t de la segunda ecuación,

$$t = \frac{y - 4}{2}$$

y sustituyendo en la primera

$$x = 3\left(\frac{y - 4}{2}\right)^2$$

b) Para $t = 0$ s el vector de posición será

$$\overrightarrow{r_o} = 0\vec{i} + 4\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

Por lo tanto, en el instante inicial, el móvil estará en el punto (0,4) (SI).

Para $t = 2$ s el vector de posición vendrá dado por

$$\overrightarrow{r_2} = 12\vec{i} + 8\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

y el móvil estará en el punto (12,8) (SI).

Por último, para $t = 5$ s

$$\overrightarrow{r_5} = 75\vec{i} + 14\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

y el móvil estará en el punto **(75,14) (SI)**.

c) Por definición de velocidad media

$$\overrightarrow{v_{m2,5}} = \frac{\overrightarrow{r_{2,5}}}{t_{2,5}} = \frac{\overrightarrow{r_5} - \overrightarrow{r_2}}{t_{2,5}}$$

Conocidos $\overrightarrow{r_5}$ y $\overrightarrow{r_2}$, podemos poner

$$\overrightarrow{v_{m2,5}} = \frac{(75\vec{i} + 14\vec{j}) - (12\vec{i} + 8\vec{j})}{t_{2,5}}$$

$$= \frac{63\vec{i} + 6\vec{j}}{3} = 21\vec{i} + 2\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

d) Como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} + 2\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

tendremos

$$\overrightarrow{v_2} = 12\vec{i} + 2\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

$$\overrightarrow{v_5} = 30\vec{i} + 2\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

6. Un móvil se desplaza en trayectoria recta, obedeciendo a la ecuación de movimiento

$$r = -5t^2 + 10t + 4 \qquad \text{(SI)}$$

Determinar:

a) Velocidad del móvil al cabo de 0,5 y 3 s, respectivamente, de iniciado el movimiento.

b) Posición del móvil en el instante en que v cambia de sentido.

c) Espacio recorrido durante los primeros 5 s.

Resolución

a) Partiendo del concepto de velocidad instantánea

$$v = \frac{dr}{dt} = -10t + 10$$

por lo tanto,

$$v_{0,5} = 5 \qquad \text{(SI)}$$

$$v_3 = -20 \qquad \text{(SI)}$$

b) El cambio de signo del valor de la velocidad, para este movimiento, nos indica un cambio de sentido del vector velocidad. En el momento de producirse este cambio de sentido $v = 0$, y ahora podremos determinar el momento en que esto ocurre, pues

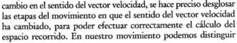
$$0 = -10t + 10 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

por lo tanto,

$$r_1 = (-5 + 10 + 4) = 9 \qquad \text{(SI)}$$

c) Como indicamos en el recordatorio teórico, al haber un cambio en el sentido del vector velocidad, se hace preciso desglosar las etapas del movimiento en que el sentido del vector velocidad ha cambiado, para poder efectuar correctamente el cálculo del espacio recorrido. En nuestro movimiento podemos distinguir dos etapas:

- Desde que sale el móvil hasta que $t = 1$ s (instante en que la velocidad cambia de sentido).
- Desde $t = 1$ s en adelante.



En consecuencia, el espacio recorrido desde que sale el móvil (punto A) hasta que su velocidad cambia de sentido (punto B) será

$$e_{AB} = |\Delta\overrightarrow{r_{AB}}| = |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_o}|$$

y el espacio recorrido desde que la velocidad cambia de sentido (punto B) hasta el instante considerado (punto C) será

$$e_{BC} = |\Delta\overrightarrow{r_{BC}}| = |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|$$

de manera que

$$e = e_{AB} + e_{BC} = |\Delta\overrightarrow{r_{AB}}| = |\Delta\overrightarrow{r_{BC}}| =$$
$$= |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_o}| + |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|$$

por lo tanto, hemos de conocer también $\overrightarrow{r_o}$ y $\overrightarrow{r_2}$ antes de resolver la cuestión:

$$r_o = +4 \qquad \text{(SI)}$$

$$r_2 = (-5 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 + 4) = -71 \qquad \text{(SI)}$$

de donde

$$\boldsymbol{e} = (9 - 4) + (4 - (-71)) = 80 \qquad \textbf{(SI)}$$

7. Un movimiento responde a la ecuación

$$\vec{r} = 2t\vec{i} + 3\vec{j} - (4t^2 + 5)\,\vec{k} \qquad \text{(SI)}$$

Determinar:

a) Posición del móvil para $t = 2$ s.

b) Velocidad instantánea para $t = 1$ s y para $t = 3$ s.

c) Aceleración media entre $t = 1$ s y $t = 3$ s.

d) Aceleración instantánea para $t = 5$ s.

e) Valores de la aceleración normal y de la aceleración tangencial para $t = 5$ s.

Resolución

a) El vector de posición para $t = 2$ s será

$$\vec{r_2} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 21\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

Por lo tanto, el móvil se encontrará en la posición **(4,3,−21) (SI)**.

b) Siendo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 8t\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

concluiremos que

$$\vec{v_1} = 2\vec{i} - 8\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{v_3} = 2\vec{i} - 24\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

c) Como

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v_{m1,3}} = \frac{\vec{v_3} - \vec{v_1}}{\Delta t} = \frac{(2\vec{i} - 24\vec{k}) - (2\vec{i} - 8\vec{k})}{3 - 1} =$$

$$= -\frac{16}{2}\vec{k} = -8\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

d) A partir de la definición de aceleración, vemos que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -8\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{a_5} = -8\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

e) Al ser

$$a_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|}$$

tendremos

$$a_t = \frac{+64t}{\sqrt{4 + 64t^2}} \qquad \text{(SI)}$$

$$a_{t5} = \frac{+320}{1604} \simeq +8 \qquad \text{(SI)}$$

Por otra parte,

$$a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|}$$

y como

$$\vec{v} \times \vec{a} = 16\vec{j}$$

tendremos

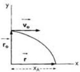
$$a_{n5} = \frac{16}{\sqrt{1604}} \simeq 0{,}4 \qquad \text{(SI)}$$

8. Un vehículo arranca del reposo con aceleración constante de 2 m/s². A los 15 s de iniciado el movimiento se desprende el cierre de una puerta lateral situado a 3,25 m del suelo. Determinar:

a) Distancia horizontal que recorre el cierre desde que se desprende hasta que toca el suelo.

b) Distancia recta entre el cierre y el lugar del vehículo del que se ha desprendido en el momento en que toca el suelo.

Resolución



a) La distancia que aquí se pide es la señalada como x_A en la figura, que coincidirá con $|\vec{r}|$.

La velocidad (horizontal) con la que sale despedido el cierre coincidirá con la que en ese momento lleve el vehículo, es decir,

$$v_o = at = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15\ \text{s} = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La ecuación del movimiento será

$$\vec{r} = 30t\vec{i} + (3{,}25 - 4{,}9t^2)\,\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

Cuando el cierre toque el suelo,

$$r_y = 0$$

por lo tanto,

$$3{,}25 - 4{,}9\ t^2 = 0$$

y el tiempo durante el que el cierre cae resulta ser de 0,81 s. El valor de r_x para ese instante será

$$r_x = x_A = 30t = \mathbf{24{,}30\ m}$$

b) En el momento de soltarse el cierre, la velocidad del vehículo era de 30 m/s, y por lo tanto el anclaje, en el momento en que el cierre toque el suelo, se encontrará en el punto en que su coordenada Y valdrá 3,25 m y la coordenada X valdrá

$$x = \left(v_x t + \frac{1}{2}\ gt^2\right) = \left(30 \cdot 0{,}81 + \frac{1}{2}\ 2 \cdot 0{,}81^2\right)\ \text{m} = 24{,}95\ \text{m}$$

Si el cierre se encuentra en el punto (24,30; 0) y el anclaje en el punto (24,95; 3,25), la distancia recta entre ambos puntos vendrá dada por el módulo del vector

$$(|24{,}95 - 24{,}30|\ ,\ |3{,}25 - 0|)$$

es decir, del vector (0,65; 3,25); por lo tanto,

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{0{,}65^2 + 3{,}25^2}\ \text{m} = \mathbf{3{,}31\ m}$$

9. Desde la almena de un castillo, un arquero dispara una flecha animada de una velocidad de 40 m/s y con una dirección que forma un ángulo de 30° bajo la horizontal (ángulo de depresión). Si la almena está situada a 45 m de altura sobre el suelo y el foso tiene 12 m de anchura, determinar a qué distancia del borde externo del foso caerá la flecha.

Resolución

La ecuación del movimiento (tomando el origen de coordenadas al pie de la almena) será

$$\vec{\mathbf{r}} = v_o t \cos \alpha\, \vec{\mathbf{i}} + \left(45 - v_o\, t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2\right) \vec{\mathbf{j}} \qquad \text{(SI)}$$

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria serán

$$x = v_o t \cos \alpha$$

$$y = 45 - v_o t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

eliminando t, llegamos a

$$y = 45 - 0{,}577\, x - \frac{4{,}9}{1200}\, x^2$$

y cuando

$$y = 0$$

tendremos

$$x = 55{,}8 \text{ m}$$

Por lo tanto, la flecha caerá a **43,8 m** del borde exterior del foso.

10. Calcular la velocidad angular del extremo de la aguja minutera de un reloj que funciona correctamente.

Resolución

La aguja minutera de un reloj da una vuelta completa por hora; por lo tanto, su velocidad angular es

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ h}} = \frac{2\pi}{3600} \text{ rad/s}$$

11. Un disco de 2 m de radio gira a 200 r.p.m., se le aplica una fuerza de frenado constante y se detiene en 40 s. Determinar:

a) Su aceleración angular media.

b) El valor de la aceleración tangencial durante el frenado.

c) La longitud del arco descrito por un punto de la periferia del disco desde que se le aplica la fuerza de frenado hasta que el disco queda detenido.

Resolución

a) La aceleración angular media viene dada por

$$\alpha_m = \frac{\omega - \omega_o}{\Delta t}$$

La velocidad angular inicial es

$$\omega_o = 200 \text{ r.p.m.} = 200 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 20{,}94 \text{ rad/s}$$

Cuando el disco se detenga (situación final), la velocidad angular es nula; por lo tanto,

$$\alpha_m = \frac{20{,}94}{40} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{\alpha_m} = 0{,}52 \, \vec{e} \qquad \text{(SI)}$$

valor que en un movimiento circular uniformemente acelerado coincide con el de $\vec{\alpha}$.

b) La aceleración tangencial podemos calcularla a partir de

$$a_t = R\alpha$$

y conocidos los valores de R y de α,

$$a_t = 2\text{m}\ 0{,}52\ \text{rad/s}^2 = 1{,}04\ \text{m/s}^2$$

es decir,

$$\overrightarrow{\mathbf{a_t}} = \mathbf{1{,}04}\ \vec{\tau} \qquad \textbf{(SI)}$$

c) El arco descrito podemos calcularlo como

$$\Delta S = R\Delta\varphi$$

en donde $\Delta\varphi$ es $\varphi - \varphi_o$:

$$\varphi - \varphi_o = \omega_o t - \frac{1}{2}\alpha t^2 =$$

$$= 20{,}94\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\ 40\ \text{s} - \frac{1}{2}\ 0{,}52\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\ 1600\ \text{s}^2 = 421{,}6\ \text{rad}$$

$$\Delta \boldsymbol{S} = 421{,}6\ \text{rad} \cdot 2\ \text{m} = \mathbf{843{,}2\ m}$$

12. Una partícula oscila con movimiento vibratorio armónico simple de frecuencia 20 Hz y amplitud 5 cm. Determinar:

a) La ecuación del movimiento.

b) La posición del móvil al cabo de 0,02 s de iniciado el movimiento.

c) Velocidad y aceleración del móvil en dicho instante.

Resolución

Para nuestro movimiento

$$A = 0{,}05 \text{ m}$$

$$f = 20 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{20} \text{ s} \Rightarrow \omega = 40\pi \text{ rad/s}$$

$$\varphi = 0 \text{ rad}$$

a) La ecuación del movimiento ha de ser del tipo

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

por lo tanto,

$$\boldsymbol{x = 0{,}05 \text{ sen } 40\pi t} \quad \textbf{(SI)} \quad [\text{E}_{\text{c. del movimiento}}]$$

b) La posición del móvil la deducimos de la ecuación del movimiento

$$x = 0{,}05 \text{ sen } (40\pi \cdot 0{,}02) \text{ m} = 0{,}03 \text{ m}$$

El móvil se encuentra en el instante mencionado a 0,03 m de la posición de equilibrio en la región positiva de la trayectoria (eje de las *X*).

c) La velocidad viene dada por

$$v = A\omega \cos (\omega t + \varphi)$$

en consecuencia,

$$\boldsymbol{v} = 0{,}05 \cdot 40\pi \cdot \cos (40\pi \cdot 0{,}02) \text{ m/s} = \mathbf{-1{,}6\pi \text{ m/s}}$$

Como vemos, la velocidad tiene su sentido orientado hacia la región negativa del eje de las *X*.

La aceleración será

$$a = -A\omega^2 \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

y

$$a = -0{,}05 \cdot 1600\ \pi^2 \cdot \text{sen}\ (40\pi \cdot 0{,}02)\ \text{m/s}^2 = 47{,}0\ \pi^2\ \text{m/s}^2$$

13. Un movimiento vibratorio armónico simple tiene un período de 2 s y su velocidad máxima es de 3 m/s. Determinar la amplitud y la aceleración máxima para este movimiento.

Resolución

Calcularemos en primer lugar el valor de la pulsación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\ \text{s}} = \pi\ \text{rad/s}$$

La relación entre la amplitud y la velocidad máxima podemos deducirla de

$$v = A\omega \cos\ (\omega t + \varphi)$$

$$v_{\text{máx}} = A\omega$$

de donde

$$A = \frac{v_{\text{máx}}}{\omega} = \frac{3\ \text{m/s}}{\pi\ \text{rad/s}} = 0{,}95\ \text{m}$$

La aceleración máxima la podemos calcular a partir de

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\ (\omega t + \varphi)$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \pi^2 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \cdot 0{,}95\ \text{m} = 0{,}95\ \pi^2\ \text{m/s}^2$$

14. Determinar a qué velocidad tendría que volar un avión que siguiese el paralelo 45 de E a O a 10 km de altura para que todos los puntos sobrevolados lo fueran a la misma hora solar.

Resolución

Para ello tendría que llevar la misma velocidad angular que la Tierra y en sentido opuesto, es decir,

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ h}}$$

y por otra parte, el radio de giro de la trayectoria del avión es

$$r = (R + h) \cos 45° = (6.372 + 10) \cos 45° \text{ km} = 4512{,}75 \text{ km}$$

y le corresponderá una velocidad lineal

$$v = r\omega = 4512{,}75 \text{ km} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ h}} = \mathbf{1181{,}4\ km/h}$$

Ejercicios propuestos

En todos los casos suponemos puntuales los móviles, nulas las fricciones y constante el valor de g.

1. Dos vehículos marchan por una carretera rectilínea. Cuando van en el mismo sentido, el que va delante le saca al segundo una ventaja de 8 m/s. Si cada uno marchase a la misma velocidad a la que iba, pero ahora circulando en sentidos contrarios, se acercarían a razón de 50 m/s. Suponiendo constantes las respectivas velocidades de los vehículos, determinar sus valores.

Solución

$\boldsymbol{v}_A = 29$ m/s; $\boldsymbol{v}_B = 21$ m/s

2. Un piragüista rema de modo que su embarcación en aguas en reposo llevaría una velocidad de 10 m/s. Trata de cruzar un tramo recto de un río cuyas aguas llevan una velocidad de 8 m/s.

a) Supuesto que rema perpendicularmente a la orilla, determinar la velocidad resultante.

b) En el caso anterior, calcular el tiempo que tardará en cruzar el río si éste tiene 60 m de anchura.

c) Supuesto que quiera alcanzar la orilla opuesta de modo que el punto de llegada y el de partida estén unidos por una recta perpendicular a las orillas, ¿en qué dirección deberá remar?

d) En el caso anterior, calcular el tiempo que tardará en cruzar el río.

Solución

a) **$|\vec{v}| = 12{,}80$ m/s; la velocidad formará un ángulo de 38°39' aguas abajo con la perpendicular a las orillas.**

b) **6 s.**

c) **Formando un ángulo de 38°39' aguas arriba con la perpendicular a las orillas.**

d) **7,68 s**

3. Determinar la aceleración, supuesta constante, de un coche que partiendo del reposo alcanza una velocidad de 100 km/h en 7,20 s.

Solución

3,84 m/s^2.

4. Desde un globo que se encuentra a 200 m de altura sobre el suelo y que asciende con velocidad constante de 10 m/s, se deja caer una granada que debe explotar al tocar el suelo.

a) ¿Qué altura ascenderá la granada, desde que queda suelta, antes de iniciar la caída?

b) ¿Cuánto tiempo tarda la granada en explotar desde que se ha soltado?

c) ¿Dónde se encuentra el globo cuando estalla la granada?

d) ¿Cuánto tiempo tarda el aeronauta del globo en oír la explosión desde que soltó la granada?

Solución

a) **5,1 m;** *b*) **7,5 s;** *c*) ***a*** **275 m sobre el suelo;** *d*) **8,3 s.**

5. Determinar con qué velocidad mínima, paralela a la superficie de un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal según una línea de máxima pendiente, debemos lanzar un cuerpo en sentido ascendente, para que éste alcance el punto más alto del mismo, si el plano tiene una longitud de 200 m.

Solución

44,27 m/s.

6. Tres gotas de agua se desprenden sucesivamente de un mismo punto a intervalos regulares de 0,2 s. ¿Qué distancias separan a las gotas un segundo después de desprenderse la última?

Solución

Las gotas primera y segunda estarán separadas por 2,6 m, mientras que la distancia entre la segunda y la tercera será de 2,1 m.

7. Un vehículo experimental marcha a 380 km/h, y mediante una deceleración constante se detiene tras recorrer 1800 m.

a) ¿Qué deceleración sufre?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en pararse desde que comienza el frenado?

b) ¿Qué espacio recorre en los últimos 20 s?

Solución

a) **3,1 m/s²;** *b*) **34,1 s;** c) **628 m.**

8. Para el movimiento representado por la ecuación

$$\vec{r} = 3t\vec{i} - 2t^2\vec{k} \qquad \text{(SI)}$$

determinar:

a) Posición del móvil para $t = 2$ s.

b) Módulo del vector desplazamiento para el intervalo comprendido entre $t = 2$ s y $t = 4$ s.

c) Velocidad instantánea para $t = 2$ s.

d) Ecuación de la trayectoria.

Solución

a) **(6, −8) (SI);** *b*) $\sqrt{612}$ **(SI);** *c*) $3\vec{i} - 8\vec{k}$ **(SI);** *d*) $y = -2x^2/9$.

9. Para el movimiento representado por la ecuación

$$\vec{r} = (2t^2 + 2)\,\vec{i} - 2\,t\vec{j} + 3\,(t + 1)\,\vec{k}$$

determinar:

a) La velocidad media para el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 2$ y $t = 4$ s.

b) La velocidad instantánea para los instantes $t = 3$ s y $t = 5$ s.

c) La aceleración media para el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 3$ s y $t = 5$ s.

d) La aceleración tangencial y el radio de curvatura para $t = 3$ s.

Solución

a) $\overrightarrow{\mathbf{v_m}} = \mathbf{12\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$ **(SI).**

b) $\overrightarrow{\mathbf{v_3}} = \mathbf{12\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$ **(SI);** $\overrightarrow{\mathbf{v_5}} = \mathbf{20\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$ **(SI).**

c) $\overrightarrow{\mathbf{a_{m3,5}}} = \mathbf{4\vec{i}}$ **(SI).**

d) $\mathbf{a_t = 48/\sqrt{157}}$ **(SI);** $\mathbf{R = \sqrt{157/128}}$ **(SI).**

10. Calcular el espacio recorrido en el octavo segundo por un móvil que cae libremente.

Solución

73,5 m.

11. De un extremo y sobre un raíl recto de 200 m de longitud parte un móvil animado con una velocidad de 30 cm/s y una aceleración de 5 cm/s². Del otro extremo, y en sentido contrario, parte 30 s después otro móvil con una velocidad de 50 cm/s y una aceleración de 20 cm/s². Determinar la posición y el momento del choque.

Solución

El choque tendrá lugar a 103,6 m del punto de salida del primer móvil y 28,65 s después de haber salido el segundo.

12. Una grúa levanta un objeto con velocidad constante de 2 m/s. Cuando éste se encuentra a 8 m sobre el suelo, se desprende de un punto de la grúa, situado a 40 m sobre el suelo, una pieza que cae libremente. Determinar la posición y el momento en que se cruzarán el objeto y la pieza.

Solución

Se cruzarán a 12,7 m sobre el suelo y 2,36 s después de soltarse la pieza.

13. Desde un avión que vuela horizontalmente a 2000 m de altura con una velocidad de 1224 km/h se deja caer un proyectil. ¿A qué distancia horizontal del blanco deberá tener lugar el lanzamiento para obtener un impacto efectivo?

Solución

A 6868 m.

14. ¿Qué inclinación ha de tener un plano, para que un cuerpo que se desliza según la máxima pendiente tarde el cuádruplo de lo que tardaría en caer libremente desde la misma altura?

Solución

14°28'.

15. Un jugador de frontón golpea la pelota cuando ésta se encuentra a un metro de altura sobre el suelo y le imprime una velocidad de 40 m/s con un ángulo con la horizontal de 45° y en sentido ascendente. Si el frontón tiene 12 m de altura y la pelota al ser golpeada se encuentra a 16 m del frontón, ¿golpeará la pelota al frontón o saldrá por encima?

Solución

Llegará al frontón a 15,4 m de altura sobre el suelo, es decir, pasará claramente por encima.

16. Por un tejado liso, inclinado 30° con la horizontal, resbala un cuerpo que, cuando se acaba el tejado, cae al vacío con una velocidad de 4 m/s. Si desde el borde del tejado al suelo hay 25 m, determinar las posiciones del cuerpo al cabo de 1, 2 y 3 s, respectivamente, de haber abandonado el tejado.

Solución

(3,4; 18,1); (6,9; 1,4); (7,1; 0) (SI)

El origen de coordenadas se ha tomado en el suelo bajo el punto en que el cuerpo salió del tejado. El tercer punto corresponde a la posición de impacto contra el suelo (que ya había tenido lugar a los 3 s).

17. Un cañón que dispara proyectiles con una inclinación fija de 30° en sentido ascendente y una velocidad de 260 m/s, debe hacer blanco sobre un globo, inicialmente situado a 500 m del cañón y sobre el suelo. ¿Cuánto tiempo después de comenzar su ascensión el globo, con una velocidad constante de 10 m/s, deberá disparar el cañón para hacer blanco? ¿A qué altura se encontrará el globo en el momento del impacto?

Solución

El cañón deberá disparar 24,23 s después de salir el globo, y en el momento del impacto el globo se encontrará a 264,5 m de altura sobre el suelo.

18. Un avión sobrevuela horizontalmente una carretera rectilínea, a 300 m de altura sobre el suelo, con una velocidad de 1008 km/h. En sentido contrario avanza por la carretera un carro blindado con una velocidad de 72 km/h. ¿A qué distancia (medida horizontalmente) del tanque deberá el avión soltar la bomba para hacer blanco?

Solución

2346 m.

19. Un globo sonda desciende con velocidad constante a razón de 5 m/s. Cuando se encuentra a 200 m de altura, se dispara desde el suelo, verticalmente y hacia arriba, un proyectil con velocidad de 60 m/s. Determinar la posición y el momento del cruce.

Solución

El primer cruce (cuando el proyectil asciende) tiene lugar al cabo de 4,8 s y a 176 m de altura sobre el suelo. A los 8,4 s de lanzado el proyectil y a 158 m de altura sobre el suelo, vuelven a cruzarse (ahora el proyectil desciende).

20. Un arquero dispara una flecha desde una altura de 1,20 m sobre el suelo formando un ángulo de 30° con la horizontal, y en sentido ascendente, sobre una presa que se encuentra a 150 m de distancia y se aleja nadando (al nivel del suelo) animada de una velocidad constante de 2 m/s. ¿Qué velocidad inicial deberá llevar la flecha para hacer blanco?

Solución

42 m/s.

21. Un cilindro, de 0,5 m de radio, gira en torno a su eje a razón de 100 r.p.m. En un momento dado se le aplica una fuerza de frenado y se detiene en 25 s. Determinar:

a) La aceleración angular supuesta constante.

b) El número de vueltas que da el cilindro desde que comienza a frenarse hasta que se detiene.

c) Aceleración normal y aceleración tangencial de un punto del cilindro situado a 30 cm del eje al cabo de 2 vueltas de iniciado el frenado.

Solución

a) $\alpha = \frac{2\pi}{15}$ **rad/s²**; *b*) **20,83 vueltas**; *c*) $a_t = \frac{0{,}6\pi}{15}$ **m/s²**; $a_n = 3{,}01\pi^2$ **m/s²**.

22. En la pista circular de un canódromo experimental que tiene 40 m de radio se sitúa un galgo 20 m por detrás de la liebre mecánica. La liebre describe la trayectoria con una velocidad constante de 54 km/h. Si el perro arranca con una velocidad de 10 m/s, ¿qué aceleración, supuesta constante, deberá tener su movimiento para alcanzar a la liebre mecánica al final de la primera vuelta?

Solución

0,816 m/s².

23. Las agujas de un reloj que funciona correctamente señalan las tres. Calcular a qué hora coincidirán las posiciones de la aguja horaria y de la aguja minutera por primera vez.

Solución

A las 3 h, 16 min, 21,8 s.

24. Dos móviles se encuentran sobre una misma trayectoria circular de 20 m de radio y en un momento dado se hallan separados 30 m sobre la trayectoria y moviéndose en el mismo sentido. El que está más adelantado se mueve con velocidad constante de 50 m/s; el que se encuentra detrás se mueve en dicho momento a 40 m/s y con una aceleración tangencial constante de 2 m/s². Determinar:

a) ¿Cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero?

b) ¿Qué velocidad posee cada móvil en el momento del alcance?

c) ¿Qué aceleración tangencial posee cada móvil en el momento del alcance?

d) ¿Qué aceleración normal posee cada móvil en el momento del alcance?

Solución

a) t = 12,41 s; *b*) v_A = 50 m/s; v_B = 64,82 m/s; *c*) a_A = 0 m/s²; a_B = 2 m/s²; *d*) a_{nA} = 125 m/s²; a_{nB} = 210 m/s².

25. De un mismo punto de una circunferencia, de 20 m de radio, parten simultáneamente sendos móviles en sentidos opuestos. El primero lleva una velocidad angular de 2π rad/h que mantiene constante; el segundo, que parte del reposo, posee una aceleración angular constante de 6π rad/h². Determinar en qué momento se encontrarán y en qué posición.

Solución

Los móviles se encontrarán al cabo de 32 min y 57 s en la posición en que el primer móvil haya girado 197°42'.

26. Una partícula está animada de un movimiento vibratorio armónico simple de frecuencia 3 Hz y amplitud 50 cm. Si la elongación en el instante inicial es nula, determinar:

a) El valor de la pulsación.

b) La ecuación del movimiento.

c) La posición del móvil para t = 2 s.

Solución

a) $\omega = 6\pi$ **rad/s;** *b)* $x = 0{,}5$ **sen** $6\pi t$ **(SI);** *c)* $x = 0$ **cm. Está en el punto de equilibrio (centro de vibración).**

27. Una partícula posee un movimiento vibratorio armónico simple de período 0,5 s y amplitud 20 cm. Si la elongación en el momento inicial es nula, determinar:

a) La ecuación del movimiento.

b) La velocidad del móvil para $t = 2{,}2$ s.

c) La aceleración del móvil para $t = 2{,}2$ s.

d) La velocidad máxima del móvil.

e) La aceleración máxima del móvil.

Solución

a) $x = 0{,}2$ **sen** $4\pi t$**;** *b)* $v = -2{,}0$ **m/s;** *c)* $a = 18{,}4$ **m/s²;** *d)* $v_{máx} = 0{,}8\pi$ **m/s;** *e)* $a_{máx} = 3{,}2\pi^2$ **m/s².**

28. Desde lo alto de un acantilado de 140 m de altura se lanza horizontalmente un proyectil con una velocidad de 40 m/s. Determinar:

a) Posición del móvil 3 s después del lanzamiento.

b) Velocidad a los 3 s de efectuado el lanzamiento.

c) Tiempo que tarda el proyectil en llegar a la superficie del agua.

d) Velocidad del proyectil al entrar en contacto con el agua.

Solución

Tomando el origen de las coordenadas en la boca de fuego: *a)* **(120; −44,1) (SI);** *b)* $\vec{v} = 40\vec{i} - 29{,}4\vec{j}$ **(SI);** *c)* **5,34 s;** *d)* $\vec{v} = 40\vec{i} - 52{,}3\vec{j}$ **(SI)**

29. Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo según el eje X con aceleración $a = 3 - 2t$ (SI) y con una velocidad inicial de 4 m/s. Determinar:

a) Velocidad para el instante $t = 5$ s.

b) Momento en que la velocidad es nula.

c) Posición para $t = 10$ s si el móvil pasa por el origen para $t = 2$ s.

Solución

a) $\boldsymbol{v_5 = -6}$ **m/s;** *b*) $\boldsymbol{t = 4}$ **s;** *c*) $\boldsymbol{x_{10} = -154{,}6}$ **m.**

Esta colección tiene como objetivo presentar material que, a la vez que valioso pedagógicamen sirva de excelente guía práctica para preparar temas de COU y Selectividad, tanto en el aspe de conocimientos como en lo referente a ejercic prácticos. Por ello, la colección está concebida forma de cuadernos, para que cada profesor o alu no trabaje aquellos temas que considere más a cuados a sus intereses.

Cada cuaderno ofrece la siguiente estructura:

- *Recordatorio de puntos fundamentales.*
- *Cuestiones de autoevaluación.*
- *Ejercicios resueltos.*
- *Ejercicios propuestos, con su solución.*

Cuadernos de COU y **Selectividad**

FISICA

ÍNDICE DE TÍTULOS

1. Cálculos con vectores.
2. Cinemática.
3. Dinámica.
4. Ondas.
5. Trabajo y energía.
6. Campos gravitatorio y electrostático.
7. Corriente alterna.
8. Termodinámica.

ISBN 84-205-2123-X

9 788420 521237 00000

Alhambra Longman